4/12/2018

Πίνακας γραμμικής απεικόνισης.

$$V^n \xrightarrow[\text{ταυτοτική}]{} V^n$$

$\langle u_1, \dots, u_n \rangle\ S$ βάση $\qquad S' = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ βάση

$u_1 = \alpha_{11} v_1 + \dots + \alpha_{n1} v_n$

$\vdots$

$u_n = \alpha_{1n} v_1 + \dots + \alpha_{nn} v_n$

Ο πίνακας αλλαγής βάσης από την S στην S' είναι:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Έστω $T : V^n \to W^k$ γραμ. απεικ.

Και βάσεις $S = \{v_1, \dots, v_n\}$

$S' = \{w_1, \dots, w_n\}$

Γράφουμε τις εικόνες της βάσης S σαν γραμ. συνδυασμούς των στοιχ. της S':

$T(v_1) = \alpha_{11} w_1 + \dots + \alpha_{k1} w_k$

$\vdots$

$T(v_n) = \alpha_{1n} w_1 + \dots + \alpha_{kn} w_k$

Ορίζουμε τον T ως προς τις βάσεις S και S'
(T, S, S') ως εξής:

$$(T, S, S') = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Δηλαδή ο προηγούμενος πίνακας έχει σαν στήλες τους συντελεστές των εικόνων των στοιχείων της βάσης S. Δηλαδή οι στήλες είναι οι αναπαραστάσεις των στοιχείων $T(v_1), \dots, T(v_n)$ προς τη βάση S'.

π.χ. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$T: (x, y) = (x+y+z, x-y, z-x)$

Να βρεθεί ο πίνακας T ως προς τις κανονικές βάσεις.

$\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle \qquad \mathbb{R}^3 = \langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle$

$T(1,0) = (1,1,-1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) - 1(0,0,1)$
$T(0,1) = (1,-1,0) = 1(1,0,0) - 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Να βρεθεί ο πίνακας της T ως προς τις βάσεις $S=\{(1,1),(1,-1)\}$ και $S'=\{(1,1,1),(0,1,0),(0,1,1)\}$

$T(1,1)=(2,0,-1)=\alpha(1,1,1)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,1,1)$

$2=\alpha$, $0=\alpha+\beta+\gamma=2+\beta+\gamma$, $-1=\alpha+\gamma=2+\gamma \Rightarrow \gamma=-3$
$\beta=1$

$T(1,-1)=(0,2,-1)=$

$\alpha'(1,1,1)+\beta'(0,1,0)+\gamma'(0,1,1)$

$\alpha'=0$, $2=\alpha'+\beta'+\gamma'=\beta'+\gamma'$, $-1=\alpha'+\gamma' \Rightarrow \gamma'=-1$
$\beta'=3$

Ο πίνακας T ως προς αυτές τις βάσεις:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \; ++$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ -x \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2: (x,y)=x(1,0)+y(0,1)$

$(x,y)=\kappa(1,1)+\lambda(1,-1)$

$$\left.\begin{matrix} x = k + \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} k = \frac{x+y}{2} \\ \lambda = \frac{x-y}{2} \end{matrix}$$

$$(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \left(\frac{x-y}{2}\right)(1,1)$$

Η αναπαράσταση του τυχαίου στοιχείου σ' αυτή τη βάση είναι $\begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}$

$$B\begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ \frac{x+y+3x-3y}{2} \\ \frac{-3x-3y-x+y}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \\ -2x-y \end{pmatrix}$$

Πρόταση: Έστω $T: V^n \to W^k$ γρ. απεικ. και S, S' αντίστοιχα βάσεις των V και W. Ο πίνακας (T, S, S') της T ως προς τις βάσεις S και S' δημιουργείται από τους συντελεστές των $T(v_i)$ εκφρασμένων στη βάση S'. Οι συντελεστές αυτοί γράφονται στις στήλες. Ας είναι αυτός ο πίνακας A. Τότε θα έχουμε:

$[T(v)]_{S'} = A[v]_S$ Εδώ $[v]_S$ είναι η αναπαράσταση του V ως προς τη βάση S και $[T(v)]_{S'}$ είναι η αναπαράσταση του $T(v)$ ως προς τη βάση S'

$A_{k\times n}\,(\ )_{n\times 1} = (\ )_{k\times 1} = [T(v)]_{S'}$

$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$
$T: V^n_S \to W^k_{S'}$

Ορισμός: Έστω A ένας $k\times m$ πίνακας. Με Σ_A συμβολίζουμε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^k$ που δημιουργείται από τις στήλες του A. Με Γ_A συμβολίζουμε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$ που δημιουργείται από τις γραμμές του A.

Π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\Sigma_A = \langle (1,3,5), (2,4,6) \rangle$
$\Gamma_A = \langle (1,2), (3,4), (5,6) \rangle$

Πρόταση: Έστω $T: V^n \to W^k$ γρ. απ. και $S = \{v_1, \dots, v_n\}$, $S' = \{w_1, \dots, w_k\}$ βάσεις του V και W αντίστοιχα.
Αν $A = (T, S, S')$ είναι ο πίνακας της T ως προς τις βάσεις S και S' τότε $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim \Sigma_A$

Αποδ.
$\mathrm{Im}\,T = T(V) = \langle T(v_1), \dots, T(v_k) \rangle \cong \Sigma_A$ (μέσω του ισομορφισμού $W^k \cong \mathbb{R}^k$)

Άρα $\dim T(V) = \dim \Sigma_A$.

Αν είχαμε $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Θεώρημα: Έστω T και $T': V^n \to W^k$ δύο γραμ. απεικ. και βάσεις S και S' αντίστοιχα. Τότε:

α) Ο πίνακας του αθροίσματος $T+T': V \to W$ έχει πίνακα $(T+T', S, S') = (T, S, S') + (T', S, S')$ το άθροισμα των πινάκων.

β) Αν $\alpha \neq 0$, τότε ο πίνακας της απεικόνισης αT είναι ο $\alpha(T, S, S')$ δηλαδή ο πίνακας της T πολλ/μένος με α.

Θεώρημα: Έστω $T: V^n \to W^k$ και $T': W^k \to Z^m$ γρ. απ. και S, S', P αντίστοιχες βάσεις. Ορίζεται η σύνθεση $T\,T': V \to Z$ η οποία είναι γραμμική. Έστω (T, S, S') και (T', S', P) οι αντίστοιχοι πίνακες των T και T' στις βάσεις που έχουν οριστεί. Τότε ο πίνακας της σύνθεσης $(T \cdot T', S, P)$ δίνεται σαν το γινόμενο των αντίστοιχων πινάκων $(T' \cdot T, S, P) = (T', S', P)(T, S, S')$